Tamsayı Parçalanışlarına Kombinatorik Bakış: Beşgen Sayı Teoremi II

Kağan Kurşungöz / kursungoz@sabanciuniv.edu

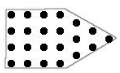
Bir önceki yazıda (MD 2014-II) Euler'in beşgen sayı teoremini kombinatorik olarak ispatlamıştık. Teoremi hatırlayalım:

Teorem 1. *Negatif olmayan herhangi bir n tamsayısı verilsin. $p_e(n)$, n'nin çift sayıda ve birbirinden farklı kısımlara parçalanışlarının sayısı, $p_o(n)$ ise n'nin tek sayıda ve birbirinden farklı kısımlara parçalanışlarının sayısı olsun. Şu halde,*

$$p_e(n) - p_o(n) = \begin{cases} (-1)^a, & n = a(3a \pm 1)/2 \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Örneğin, $n = 8$'in çift sayıda farklı kısımlara parçalanışlarının sayısı 3'tür (bu parçalanışlar $7+1$, $6+2$, ve $5+3$'tür). 8'in tek sayıda farklı kısımlara parçalanış sayısı da 3'tür (bu parçalanışlar ise 8, $5+2+1$, ve $4+3+1$'dir). Böylece $p_e(8) - p_o(8) = 0$ olur, çünkü $8 = a(3a \pm 1)/2$ eşitliğini sağlayacak bir a tamsayısı yoktur. Diğer bir ifadeyle, 8 beşgen bir sayı olmadığından tek sayıda farklı kısımlara parçalanışları çift sayıda farklı kısımlara parçalanışlarıyla aynı sayıdadır.

$a(3a \pm 1)/2$ formundaki sayılara beşgen sayı denmesinin sebebi bu sayıda noktayla kenarı a uzunluğunda olan düzgün bir beşgen oluşturabilmemizdir.



$4 \cdot (3 \cdot 4 - 1)/2 = 22$ noktadan bir beşgen oluşturabiliriz

Euler'in beşgen sayı teoremini kendi ifadesi aşağıdaki gibidir.

Teorem 2. *$|q| < 1$ için*

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots = \sum_{a=-\infty}^{\infty} (-1)^a q^{a(3a+1)/2}.$$

Euler işe sol taraftaki parantezleri seri şeklinde açarak ve çok az katsayının sıfırdan farklı olduğunu, sıfırdan farklı olanların da ± 1 olduğunu farkederek başlamıştı. Özdeşliğin sağ tarafını $a < 0$, $a = 0$ ve $a > 0$ durumlarına göre üçe bölüp ilk toplamda indis değiştirirsek ($a \leftarrow -a$) tek yönlü bir toplam elde ederiz.

$$\sum_{a=-\infty}^{-1} (-1)^a q^{a(3a+1)/2} + 1 + \sum_{a=1}^{\infty} (-1)^a q^{a(3a+1)/2}$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} (-1)^a q^{a(3a-1)/2} + 1 + \sum_{a=1}^{\infty} (-1)^a q^{a(3a+1)/2}$$

$$= 1 + \sum_{a=1}^{\infty} (-1)^a q^{a(3a\pm1)/2}.$$

En alta yazdığımız toplamı $\sum_{c=0}^{\infty} c_n q^n$ gibi bir kuvvet serisi olarak düşünürsek, tam olarak

$$c_n = \begin{cases} (-1)^a, & n = a(3a \pm 1)/2 \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur. Teorem **??**'e göre $c_n = p_e(n) - p_o(n)$'dir. Böylece Teorem **??**'yi ispatlamak,

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (p_e(n) - p_o(n)) q^n$$

olduğunu görmeye indirgenir. Sol taraftaki çarpımı açarsak, her $k \geq 0$ ve her $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ için elimizde

$$(-q^{i_1})(-q^{i_2})\cdots(-q^{i_k}) = (-1)^k q^{i_1+i_2+\cdots i_k}$$

şeklinde terimler olur. Zira bir grup parantezi çarparsak elde edeceğimiz terimlerin çarpanlarının herbiri bir parantezin içinden gelecektir. Bu açılımda q^n'nin katsayısını hesaplamak için de $n = i_1 + i_2 + \cdots + i_k$ eşitliğinin $k \geq 0$ ve $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ şeklinde kaç çözümü olduğunu saymamız gerektiğini düşünebiliriz.

Fakat q'nun kuvvetlerinin önündeki işarete dikkat edelim, bu işaret k çift iken pozitif, k tek iken negatiftir. Öte yandan, $n = i_1 + i_2 + \cdots + i_k$ denkleminin istenen formda çözüm sayısı n'nin kısımları farklı parçalanışlarının sayısıdır. Bunların kısımları çift sayıda olanlarından kısımları tek sayıda olanları çıkarıyoruz. Elde ettiğimiz sayı negatif olmayan her n tamsayısı için yine $p_e(n) - p_o(n)$'dir.

Bu serinin ilk birkaç terimini yazalım.

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots = \sum_{a=-\infty}^{\infty} (-1)^a q^{a(3a+1)/2}$$

$$= 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + + - - \cdots$$

İddia ettiğimiz ve ispatladığımız gibi sadece beşgen sayı olan üsler gözüküyor, katsayıları da $+1$ veya -1.

1. Parçalanış Sayılarının Hesaplanması

Negatif olmayan bir n tamsayısının tüm parçalanışlarının sayısına $p(n)$ demiştik. Dikkat edelim ki burada kısımların birbirinden farklı olması şartı yok. Mesela $p(4) = 5$ (4'ün tüm parçalanışları 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, ve 1+1+1+1). Parçalanış fonksiyonu $p(n)$'yi katsayı olarak kabul eden bir kuvvet serisi, yani $p(n)$'nin üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} = \sum_{n\geq 0} p(n)q^n$$

Bu özdeşliği açıklamak için de öncelikle geometrik seriler kullanarak sol tarafta paydadaki çarpanları birer birer açalım.

$$(1+q+q^2+q^3+\cdots)(1+q^2+q^4+q^6+\cdots)\cdots$$

Bu çarpmayı yaptığımızda $q^n = q^{1m_1+2m_2+\cdots+km_k}$ şeklinde terimler elde ederiz. Böyle her bir terim de n'nin m_1 tane 1, m_2 tane 2, $\ldots$, m_k tane k olan parçalanışına tekabül eder. Diğer bir ifadeyle, q^n tam olarak $p(n)$ defa gözükür.

Şimdi çok basit bir gözlem yaparak elimizdeki iki seriyi birleştirelim.

$$\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} = 1$$

Üstteki seriyi Euler'in beşgen sayı teoremi (Teorem **??**) ile açalım, paydadaki çarpımın da parçalanış sayılarını ürettiğini hatırlarsak

$$\big(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + + - - \cdots\big)$$
$$\times\big(p(0) + p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + \cdots\big)$$
$$= 1 + 0q + 0q^2 + 0q^3 + \cdots$$

olur.

İki kuvvet serisi birbirine özdeş ise aynı kuvvetteki terimlerin katsayılarının eşit olması gerekir. Burada aslında eşitlik olarak yazdığımız ifadeler özdeşliklerdir. q'nun izin verilen herhangi bir değeri için eşitlikler sağlandığı için bunlara özdeşlikler deriz. Kalkülüs ile biraz haşır neşir olmuş okurlarımız için burada gördüğümüz tüm seri ve çarpımların $|q| < 1$ durumunda mutlak yakınsak olduğunu belirtelim.

Sol taraftaki iki seriyi çarpacak ve katsayılarını sağ taraftakilere eşitleyeceğiz. Sağdaki kuvvet serisinin sadece sabit terimi 1, kalan katsayıları sıfırdır.

Soldaki çarpımda sabit sayıyı sadece parantez içlerindeki sabit sayıları çarparak elde edebiliriz.

$$1 \cdot p(0) = 1$$

eşitliğinden $p(0) = 1$ olduğunu buluruz (sıfırın boş parçalanışı). q^1 terimini elde etmek için solda iki seçeneğimiz var.

$$1 \cdot p(1) - 1 \cdot p(0) = 0$$

eşitliğinden önceden bulduğumuz $p(0)$ değerini de kullanarak $p(1) = 1$ elde ederiz. Gerçekten de 1'in tek parçalanışı vardır. Bu şekilde ilerleyerek aşağıdaki denklemleri yazarız. Denklemler sırasıyla q^2, q^3, q^4 ve q^5'in iki taraftaki katsayılarını eşitlemektedir.

$$\begin{aligned} 1 \cdot p(2) - 1 \cdot p(1) - 1 \cdot p(0) &= 0 \\ 1 \cdot p(3) - 1 \cdot p(2) - 1 \cdot p(1) &= 0 \\ 1 \cdot p(4) - 1 \cdot p(3) - 1 \cdot p(2) &= 0 \\ 1 \cdot p(5) - 1 \cdot p(4) - 1 \cdot p(3) + 1 \cdot p(0) &= 0 \end{aligned}$$

Denklemleri yazdığımız sırayla çözersek

$$p(2) = 2, \quad p(3) = 3, \quad p(4) = 5, \text{ ve } p(5) = 7$$

buluruz. Dileyen okur bu sayıları 2, 3, 4 ve 5'in tüm parçalanışlarını yazarak kontrol edebilir. Parçalanış fonksiyonunun ilk birkaç değeri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$
0	1	10	42	20	627
1	1	11	56	21	792
2	2	12	77	22	1002
3	3	13	101	23	1255
4	5	14	135	24	1575
5	7	15	176	25	1958
6	11	16	231	26	2436
7	15	17	297	27	3010
8	22	18	385	28	3718
9	30	19	490	29	4565

2. Değdi mi?

Bu bölümde attığımız taşın ürküttüğümüz kurbağaya değip değmediğini tartışacağız. Euler'in beşgen sayı teoreminin tamsayı parçalanışları teorisindeki yerini bir tarafa bırakalım, sadece parçalanış sayılarını hesaplamak için böyle bir yardımcı sonuca gerek var mıydı? Peşin peşin cevabı da söyleyelim: Evet, fazlasıyla değdi. Şimdi de iddiamızı desteklemeye çalışalım.

Önceki bölümde yazdığımız denklemlerde $p(n)$'yi çekersek

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \cdots + (-1)^{a-1} p(n - \frac{a(3a-1)}{2}) + (-1)^{a-1} p(n - \frac{a(3a+1)}{2}) + \cdots$$

buluruz. Bu sonsuz bir toplam değil, negatif sayılara ulaştığımız anda duruyoruz. Zira negatif sayıların parçalanış sayısı sıfırdır. Dolayısıyla, $p(n)$'yi bulmak için n'den küçük beşgen sayıların sayısı kadar değer kullanıyoruz.

Ayrıca $p(n-1), p(n-2), p(n-3), \ldots, p(1), p(0)$ değerlerinin hepsine ihtiyacımız var. Çünkü $p(n-1)$ hesaplanırken ilk terim $p(n-2)$, $p(n-2)$ hesaplanırken ilk terim $p(n-3)$ vs.

Okur önceki bölümde $p(0)$'ı hesaplamak için 1, $p(1)$'i hesaplamak için toplamda 2, $p(2)$'yi hesaplamak için toplamda 4, $p(3)$'ü hesaplamak için toplamda 6 ... işlem yaptığımızı kontrol edebilir. Aşağıdaki tabloda muhtelif $p(n)$'ye ulaşmak için toplamda kaç işlem yapmak gerektiği, ve bu işlem sayılarının nasıl büyüdüğüyle ilgili gözlemlerimiz var.

n	$p(n)$ için kaç işlem yaptık	$n^{3/2}$
1	2	1
4	8	8
9	26	27
16	55	64
25	91	125
36	200	216
49	336	343
64	508	512
81	729	729
100	989	1000
121	1346	1331
144	1738	1728
169	2246	2197
196	2817	2744
200	2905	2828.43

Sağdaki iki sütunu karşılaştırdığımızda $p(n)$'yi hesaplamak için gereken işlem sayısının kabaca $n^{3/2}$ mertebesinde olduğunu görüyoruz. Bunun sebeplerini açıklamadan önce bir kıyaslama daha yapalım.

$$p(200) = 3,972,999,029,388$$

Eğer $p(200)$'ü hesaplamak için 200'ün bütün parçalanışlarını yazmaya kalksaydık dört trilyona yakın parçalanış yazacaktık. Fakat tarif ettiğimiz şekilde 2905 toplama/çıkarma yaptıktan sonra $p(200)$'e ulaşıyoruz, hiçbir parçalanışı açık açık da yazmamıza gerek kalmadan. Sabırlı bir çalışmayla birkaç saatte başarabileceğimiz bir şey bu.

Elbette bir bilgisayar programı yazarak da bunu yapabiliriz. Göz açıp kapayıncaya kadar programımız ilk birkaç yüz, hatta ilk birkaç bin parçalanış sayısını üretir. Tamsayı parçalanışlarını tek tek üreten bir bilgisayar programı yazmak da ihtimal dahilinde, fakat deneyenler görecek ki parçalanış sayılarını hesaplamak için çok daha verimli olan yöntem beşgen sayıları kullanmaktır.

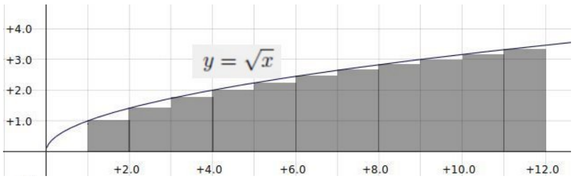
Peki, $n^{3/2}$ nereden aklımıza geldi? Beşgen sayıların formülü olan $a(3a \pm 1)/2 = \frac{3}{2}a^2 \pm \frac{a}{2}$ ifadesine baktığımızda görürüz ki, a'ıncı beşgen sayı a^2 mertebesinde. Bunu tersten düşünürsek, herhangi bir n tamsayısından küçük olan beşgen sayıların sayısı, $\sqrt{n}$ ile doğru orantılı. Diyelim ki belirli bir C sabiti için n'ye kadar olan yaklaşık $C\sqrt{n}$ kadar beşgen sayı var. Sonuçta $p(n)$'yi veren denklemde yaklaşık $C\sqrt{n}$ terim var, başka bir deyişle $C\sqrt{n}$ tane toplama/çıkarma işlemi yapıyoruz.

Özetle, hiç bir parçalanış sayısını bilmeden başlarsak,

$p(n)$ için $C\sqrt{n}$ aritmetik işlem,
$p(n-1)$ için $C\sqrt{n-1}$ aritmetik işlem,
$p(n-2)$ için $C\sqrt{n-2}$ aritmetik işlem,
$\vdots$
$p(1)$ için $C\sqrt{1}$ aritmetik işlem gerekiyor. Bunların toplamı yaklaşık olarak

$$C\sqrt{n} + C\sqrt{n-1} + C\sqrt{n-2} \cdots$$
$$= C \sum_{k \leq n} \sqrt{x}$$
$$\approx C \int_0^{n+1} \sqrt{x} \mathrm{d}x = \frac{2C}{3}(n+1)^{3/2} \approx \frac{2C}{3}(n)^{3/2}$$

n değeri büyüdükçe işlem sayısı ile $\frac{2C}{3}n^{3/2}$ arasındaki oran 1'e gidecek. İlgili tabloyu daha uzatırsak, C sabitinin ne olacağını ampirik olarak belirleriz. Toplamı integralle nasıl bağladığımızı ise aşağıdaki şekle bakarak görebiliriz.



İntegral eğrinin altın kalan alanı verirken, toplam eğrinin altındaki dikdörtgenlerin alanlarını veriyor. Diğer bir deyişle, integral toplam için bir üst sınır belirliyor.

3. Görsel Medyada Tamsayı Parçalanışları

1900'lü yılların başlarında İngiliz matematikçi Percy MacMahon, bahsettiğimiz yöntemle $p(n)$ değerlerini $n = 1, 2, \ldots, 200$ için hesaplayıp bir tablo haline getirdi. Bu sayıları Hardy ve Ramanujan'a gösterdiği zaman Ramanujan $p(n)$ için bir takım aritmetik özellikler öngördü. Bu aritmetik özellikler ve ispatlarından şu anda bahsedecek değiliz, fakat MacMahon'un bu tabloyu elle hazırlaması o dönem için dikkate değer.

Birkaç yıl önce Amerika'da bir film şirketi Ramanujan'ın hayatını anlatan bir film çekmeye karar vermiş. Senaryoyu Ramanujan'ın hayatını ve çalışmalarını bilen birkaç matematikçiye gösterdiklerinde matematikçilerin tepkileri benzer olmuş. Senaryo tarihsel olarak da matematiksel olarak da çok fazla saçmalık içermekteymiş. Film şirketinin danıştığı iki matematikçiden dinlediğimiz bir sahneyi aktaralım. Bu matematikçiler Krishnaswami Alladi (*The Ramanujan Journal*'ın kurucusu ve editörü) ve George Andrews (*The Lost Notebook of Ramanujan I-V* kitaplarının bir yazarı, Amerikan Matematik Derneği eski başkanı). An itibariyle bu film çekildi mi veya gösterime girdi mi bilmiyoruz.

Filmin bir sahnesinde MacMahon, doktora öğrencilerini bir sınıfa toplamış, herkes önündeki kağıtlara harıl harıl 200'ün parçalanışlarını yazıyor. Güya MacMahon öğrencilere bu tamsayı parçalanışlarını tek tek yazdırıp her öğrencinin kaç parçalanış yazdığını saydırıp toplayacak, böylece $p(200)$'ü bulacak. Önceki parçalanış sayılarını da bulduklarına göre, $n = 1, 2, \ldots, 199$ için bu işlem önceden yapılmış.

Bir dizi iyimser tahmin ve akabinde bir hesap yapalım. Diyelim ki MacMahon'un 10 tane doktora öğrencisi var (aynı anda bu kadar doktora öğrencisi olan kaç matematikçi vardır acaba). Yine diyelim ki herkes saniyede bir parçalanış yazabiliyor (200'ün rasgele bir parçalanışını bir saniyede yazabilir misiniz?). Bütün öğrenciler günde 10 saat durmadan parçalanış yazıyorlar, ve yılın her günü de çalışıyorlar. Diyelim ki MacMahon öğrencilerini öyle bir koordine etmiş ki, herkesin yazdığı parçalanışlar diğerlerinin yazdıklarından farklı, kimse aynı parçalanışı iki defa yazmıyor, ve 200'ün bütün parçalanışlarının da yazılacağını biliyoruz. Bir yılda kaç tane parçalanış yazabilirler?

$$\begin{aligned}
&10 \text{ (öğrenci) } \times 1 \text{ (saniyede bir parçalanış)}\\
&\times 60 \text{ (dakikada altmış saniye)}\\
&\times 60 \text{ (saatte altmış dakika)}\\
&\times 10 \text{ (günde on saat) } \times 365 \text{ (yılın her günü)}\\
=&131,400,000 \text{ parçalanış}
\end{aligned}$$

$p(200) = 3,972,999,029,388$ olduğuna göre hesapların nihayete ermesi için

$$\frac{3,972,999,029,388}{131,400,000} \approx 30,236$$

yıl gerekiyor. MacMahon birkaç öğrenci daha bulsa, herkesi günde yirmi saat çalıştırsa yine pek olacak gibi değil.

Yine diyelim ki daha küçük sayılar için bunu yapabiliyoruz, zannetmiyorum ki hiç bir matematikçi otursun da biteviye tamsayı parçalanışları yazsın, veya böyle bir işle doktora öğrencilerini meşgul etsin. Ne var ki matematikçiler ya dışarıdan böyle gözüküyor, ya da böyle çalışırlarsa diğer insanların ilgisini daha çok çekecekler.

4. Başka Yol Yok mu?

Önceki bölümdeki kaba hesabı bir bilgisayar programının 200'ün bütün parçalanışlarını ne kadar zamanda yazacağını bulmak için de yapabiliriz. O zaman iyimser tahminlerimiz geçerli olur. Bilgisayar yedi gün yirmi dört saat çalışacak, yazdığımız program bütün parçalanışların sadece birer kez yazılacağını garanti edecek, bilgisayar her saniyede yüzlerce parçalanış üretebilecek vs. Bu koşullarda bile arif olan anladı ki, beşgen sayıları kullanmak bilgisayar için de inanılmaz hız kazandıracak.

Peki, parçalanış sayılarını hesaplamak için kaba kuvvetten başka bildiğimiz tek yol bu mu? Pratik olarak evet, teorik olarak hayır. Hardy ve Ramanujan, $p(n)$'yi sabit hatayla hesaplayan bir formül bulmuşlardı, MacMahon'un listesi de bu sabitin çok küçük olduğunu doğruladı. 1940'larda Rademacher nihayet $p(n)$'nin tam değerini veren bir formül buldu, ama bu da sonsuz bir seriden ibaret olduğu için serinin nasıl yakınsadığını kestirmemiz ve ona göre ilk birkaç terimi hesaplamamız gerekir. Bu formülleri merak edenler kaynakçada geçen *Theory of Partitions* kitabında beşinci konuya bakabilirler.

Yakın zamanda Ken Ono ve çalışma arkadaşları $p(n)$ için bir takım cebirsel sayıları kullanarak, seri toplamadan sonlu adımda sonuç veren bir formül ürettiler. Fakat bu cebirsel sayıları hesaplamak da, sonlu adımdaki işlemleri yapmak da (hele elle olursa) zordur. İsteyenler Ken Ono'un kaynakçada verilen kişisel sayfasına bakabilirler. Şimdiye kadar bahsettiğimiz formüllerin ispatlarını yapmak hiç kolay bir iş değildir.

Hülasa, Euler'in beşgen sayı teoremi olanca güzelliği, sadeliği, ispatının anlaşılırlığı ve kullanışlılığıyla teorideki önemini korumaktadır.

Kaynakça:

Theory of Partitions, George E. Andrews, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, 1976.

Integer Partitions, George E. Andrews and Kimmo Eriksson, Cambridge University Press, 2004.

`http://www.mathcs.emory.edu/~ono/` (Ken Ono'nun kişisel web sayfası)