# Tamsayı Parçalanışlarına Kombinatorik Bakış: Beşgen Sayı Teoremi

*Kağan Kurşungöz / kursungoz@sabanciuniv.edu*

Pozitif bir tamsayı $n$'nin artmayan pozitif sayıların toplamı olarak ifadesine $n$'nin bir tamsayı parçalanışı demiştik. Mesela $4+3+1$, 8'in bir parçalanışıdır, kullanılan kısımlar 4, 3, ve 1'dir. $3+4+1$'i de aynı kabul ettiğimiz için kısımları artmayan sırada yazarız. Okur 8'in toplam 22 parçalanışı olduğunu, daha kısa bir ifadeyle $p(8) = 22$ olduğunu, parçalanışların tümünü yazarak kontrol edebilir.

Bu yazıda kısımları tekrar etmeyen parçalanışlar üzerine yoğunlaşacağız. Yukarıdaki örnekte $4+3+1$, bu koşulu sağlıyor, ama $3+3+2$ deseydik bu koşul sağlanmazdı.

8'in farklı kısımlara parçalanışlarını yazalım.

$$8,\ 7{+}1,\ 6{+}2,\ 5{+}3,\ 5{+}2{+}1,\ 4{+}3{+}1$$

Toplam 6 parçalanış yazdık. Gördüğümüz gibi bunlar, 8'in 22 tane olan parçalanışlarının sadece küçük bir kısmı. Aynı şeyi 9 ve 10 için de yaparsak, sırasıyla

$$9,\ 8{+}1,\ 7{+}2,\ 6{+}3,\ 5{+}4,\ 6{+}2{+}1,\ 5{+}3{+}1,\ 4{+}3{+}2;$$

$$10,\ 9{+}1,\ 8{+}2,\ 7{+}3,\ 6{+}4,\ 7{+}2{+}1,\ 6{+}3{+}1,\ 5{+}4{+}1,\ 5{+}3{+}2,\ 4{+}3{+}2{+}1$$

elde ederiz. Demek ki 9 ve 10'un da kısımları birbirinden farklı parçalanışlarının sayısı sırasıyla 8 ve 10'muş.

Verilen pozitif bir $n$ tamsayısının farklı kısımlara parçalanış sayısına $p_d(n)$ diyelim. Yukarıda $p_d(8) = 6$, $p_d(9) = 8$ ve $p_d(10) = 10$ olduğunu hesapladık. Bunlardan bir çıkarımda bulunabilir miyiz?

Gözümüze ilk çarpan, bu sayıların aritmetik bir dizi (terimlerin farkları sabit) oluşturduğu. Bunu ispata kalkmadan önce bir iki kontrol yapmakta fayda var yalnız. Vakti bol olan okur $p_d(11) = 12$, $p_d(12) = 15$ ve $p_d(13) = 18$ olduğunu kontrol edebilir. Aritmetik dizi olasılığı $n = 12$'de ve $n = 13$'te ortadan kalkıyor.

Beklentilerimizi biraz düşürebiliriz. Elimizdeki sayıların $p_d(12) = 15$ hariç çift sayılar olduğuna dikkat edelim. $n = 12$'nin iki gözlemimizde de kuralı bozan eleman olduğunu da unutmayalım.

İlk birkaç pozitif tamsayı için $p_d(n)$ değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

| $n$ | $p_d(n)$ | $n$ | $p_d(n)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 12 | 15 |
| 2 | 1 | 13 | 18 |
| 3 | 2 | 14 | 22 |
| 4 | 2 | 15 | 27 |
| 5 | 3 | 16 | 32 |
| 6 | 4 | 17 | 38 |
| 7 | 5 | 18 | 46 |
| 8 | 6 | 19 | 54 |
| 9 | 8 | 20 | 64 |
| 10 | 10 | 21 | 76 |
| 11 | 12 | 22 | 89 |

Değerlerin çoğunluğunu çift sayılar oluşturuyor. Kuralı bozan tamsayılar ise 1, 2, 5, 7, 12, 15, ve 22. Eğer tabloyu devam ettirseydik tek sayıları giderek daha seyrek görmeye başlayacaktık. Bu değerlerden sonra $p_d(n)$'yi tek sayı yapan en küçük $n$ değerleri 26, 35 ve 40'tır.

Şu ana kadar üç aşağı beş yukarı Euler'ın konu hakkındaki ilk izlenimlerini okudunuz. *Az sayıda istisna* hariç $p_d(n)$ çift sayıdır desek matematiksel olarak hemen hemen hiç bir şey ifade etmemiş olurduk. Fakat bu bağlamda Euler'in adını andığımız için okur bizi şimdilik bağışlayacaktır. Önümüzdeki bölümde bu *az sayıda istisna*yı somutlaştıracak ve bir teorem ispatlayacağız.

## 1. "Hemen Hemen" Birebir Eşleme

Verilen herhangi bir pozitif tamsayı $n$'nin kısımları birbirinden farklı parçalanışları sayısının hemen hemen her zaman çift sayı olduğunu iddia etmiştik. Bu bölümde bunu ispatlamaya çalışacağız.

Bir kümenin çift sayıda elemanı olduğunu göstermenin bir yolu, eleman sayısı aynı iki kümenin ayrık bileşimi şeklinde yazılabileceğini göstermektir. Matematiksel ifadeyle, sonlu sayıda elemanı olan bir $A$ kümesi için $A_1 \bigcup A_2 = A$, $A_1 \bigcap A_2 = \varnothing$, ve $|A_1| = |A_2|$ şartlarını sağlayan $A_1$ ve $A_2$ kümesi bulabiliyorsak, $A$ kümesinin çift sayıda elemanı vardır. Daha doğrusu $|A| = 2|A_1|$'dir. Burada $|A_1|$, $A_1$ kümesinin eleman sayısını, $\varnothing$ ise boş kümeyi temsil eder.

Sonlu sayıda elemanı olan iki kümenin de aynı sayıda elemana sahip olduğunu birinden diğerine birebir ve örten bir fonksiyon bularak gösterebiliriz.

Şimdi, kullanacağımız kümeleri tanımlayıp örnekler verelim.

$\mathcal{F}_n = n$'nin kısımları farklı olan parçalanışları kümesi,

$\text{Ç}_n = n$'nin kısımları farklı ve çift sayıda olan parçalanışları kümesi,

$\mathcal{T}_n = n$'nin kısımları farklı ve tek sayıda olan parçalanışları kümesi

olsun. Aşikardır ki $\text{Ç}_n \bigcap \mathcal{T}_n = \varnothing$, çünkü bir parçalanış aynı anda hem çift sayıda hem tek sayıda kısımdan oluşamaz. Ayrıca $\text{Ç}_n \bigcup \mathcal{T}_n = \mathcal{F}_n$dir, zira bir pozitif tamsayı (kullanılan kısımların sayısı) ya çifttir, ya tektir.

Önceki bölümden örneklerle devam edersek,

$$\mathcal{F}_8 = \{8, 7+1, 6+2, 5+3, 5+2+1, 4+3+1\},$$

$$\text{Ç}_8 = \{7+1, 6+2, 5+3\},$$

$$\mathcal{T}_8 = \{8, 5+2+1, 4+3+1\},$$

$$\mathcal{F}_9 = \{9, 8{+}1, 7{+}2, 6{+}3, 5{+}4, 6{+}2{+}1, 5{+}3{+}1, 4{+}3{+}2\},$$

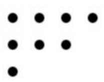
$$\text{Ç}_9 = \{8+1, 7+2, 6+3, 5+4\},$$

$$\mathcal{T}_9 = \{9, 6+2+1, 5+3+1, 4+3+2\}.$$

Görüyoruz ki $|\text{Ç}_8| = |\mathcal{T}_8|$ ve $|\text{Ç}_9| = |\mathcal{T}_9|$. Demek ki işe $\text{Ç}_n$ ve $\mathcal{T}_n$ arasında bir eşleme arayarak başlayabiliriz. Hatırlayalım ki $p_d(12) = 15$, yani $\text{Ç}_{12}$ ve $\mathcal{T}_{12}$ arasında birebir eşleme yapmamız mümkün değil. Olsaydı, iki kümenin toplam eleman sayısı çift olurdu.

Bahsettiğimiz birebir eşlemeyi yaptığımızda neden "hemen hemen" her zaman işe yaradığını, ve 12 ve kuralı bozan diğer sayılar için neden işe yaramadığını göreceğiz. Dahası, kuralı bozan sayılar için bir formül de üreteceğiz.

Öncelikle tamsayı parçalanışlarını daha görsel bir biçimde ifade edelim. Bir tamsayı parçalanışının Ferrers grafiği, ilk satırında ilk kısım kadar nokta, ikinci satırında ikinci kısım kadar nokta vs. olan sola dayalı iki boyutlu noktalar kümesidir. Mesela, 4+3+1'in Ferrers grafiği aşağıdaki gibidir.



4+3+1

Kısımları farklı bir tamsayı parçalanışı için

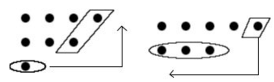
$a =$ en büyük kısım ile biten ardışık kısımların sayısı,
$b =$ en küçük kısım

olsun. Mesela 4+3+1 için $a = 2$ ve $b = 1$'dir. Çünkü en büyük kısım ile biten ardışık kısımlar iki tanedir (3 ve 4), en küçük kısım da 1'dir. Bu türden bir $\mu$ parçalanışı verilmiş olsun. $\mu$ üstünde F. Franklin tarafından bulunan bir kıvrılma (İng. involution) işlemi $f(\mu)$ tanımlayacağız.

$a < b$ ise $f(\mu)$'yü $\mu$'nün en büyük $a$ tane kısmından birer eksiltip $a$'ya eşit yeni bir en küçük kısım ekleyerek oluşturalım. Şu halde $f(\mu)$'nün de kısımları birbirinden farklıdır. Şart koştuğumuza göre en küçük kısım $a$, bir büyük kısım $b$'den küçüktür. Ayrıca en büyük kısmı içeren ardışık kısımlar dizisinin hepsinden bir çıkardık, dizinin elemanları hala birbirinden farklıdır. Bu dizinin en küçük elemanı ve ondan sonraki en büyük kısım arasındaki fark en az ikidir, çünkü bir olsaydı ardışık dizimiz daha uzun olurdu. Demek ki ardışık dizinin elemanları ile kalan kısımlar da hala birbirinden farklı.

$a \geq b$ durumunda ise $f(\mu)$'yü $\mu$'nün en küçük kısmı $b$'yi silip, en büyük $b$ tane kısmı birer artırarak oluşturalım. Bu halde $f(\mu)$'nün kısımlarının birbirinden farklı olduğunu kanıtlamayı okura bırakıyoruz.

Örneğin, $f(4+3+1) = 5+3$, ve $f(5+3) = 4+3+1$. İki parçalanışın da kısımları birbirinden farklı.



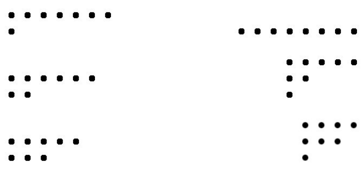
$4+3+1 \longleftrightarrow 5+3$

Bu aslında bir tesadüf değil. $f(\mu)$'yü birinci şekilde (yeni bir en küçük kısım ekleyerek) oluşturduğumuzda, $f(\mu)$'nün en büyük kısmını içeren ardışık dizi en az $a$ uzunluğunda olmak zorunda, çünkü $a$ ardışık kısmın hepsini birer eksilttik ve ardışık olma şartı bozulmadı. Böylece $f(f(\mu))$'yü oluşturacağımız zaman diğer duruma göre hareket ederiz, ve yazdığımız en küçük kısmı silip en büyük $a$ kısmı birer artırarak başladığımız parçalanışa döneriz.

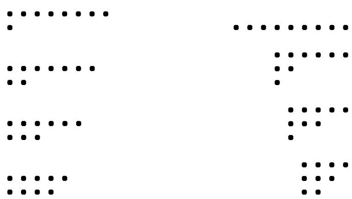
Okur, $f(\mu)$'yü ikinci şekilde oluşturduğumuzda $f(f(\mu))$'yü de birinci şekilde oluşturup başlangıç noktasına döndüğümüzü kontrol edebilir. Gördüğümüz üzere $f$'yi uygulayabildiğimiz zaman $f^2(\mu) = f \circ f(\mu) = \mu$ oluyor. İkinci uygulamada birim fonksiyonu veren fonksiyonlara kıvrılma deriz.

$\mu$ ve $f(\mu)$ parçalanışlarının kısım sayıları arasındaki fark her zaman birdir. Yani, biri çift sayıysa diğeri tek sayıdır. Bu noktada $\text{Ç}_8$ ile $\mathcal{T}_8$, ve $\text{Ç}_9$ ile $\mathcal{T}_9$'un elemanlarının nasıl eşleştiğini görelim.

| $Ç_8$ | $\longleftrightarrow$ | $\mathcal{T}_8$ |
|---|---|---|
| 7+1 | | 8 |
| 6+2 | | 5+2+1 |
| 5+3 | | 4+3+1 |

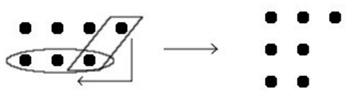


| $Ç_9$ | $\longleftrightarrow$ | $\mathcal{T}_9$ |
|---|---|---|
| 8+1 | | 9 |
| 7+2 | | 6+2+1 |
| 6+3 | | 5+3+1 |
| 5+4 | | 4+3+2 |



Dikkat edilmesi gereken bir diğer husus, kısımların hepsi ardışık bir dizi oluşturmadığı sürece $f$ kıvrılmasının kısımları farklı parçalanışlara uygulanınca yine kısımları farklı parçalanışlar ürettiğidir. Bunun sebebi, en küçük kısmın, en büyük kısmı içeren ardışık dizi içinde olmadığında ardışık diziden birer eksildiği zaman boyutunu korumasıdır. Yine benzer şekilde, en küçük kısım, en büyük kısmı içeren ardışık dizi içinde değilse, en küçük eleman silindiğinde bahsedilen ardışık dizininin eleman sayısı değişmez.

Eğer kısımların tümü ardışık bir dizi oluşturuyorsa biraz daha dikkatli olmamız gerekir. Mesela $4+3$ parçalanışına $f$'yi uygulayamayız, çünkü birinci şarta göre 4 ve 3'ten birer eksiltip 2'yi en küçük kısım olarak yazarsak $3+2+2$ elde ederiz ki, kısımlar birbirinden farklı olmaz.



4+3 $\rightarrow$ 3+2+2 ?

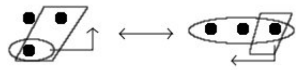
Başka bir örnek $3+2$ parçalanışıdır. Burada ikinci şarta göre en küçük kısmı silip en büyük iki ardışık kısmı iki artırırız dediğimizde artık elimizde iki ardışık kısım yok.

3+2 $\rightarrow$ ??

"İkinci satırda yanlış yerde kalan bir noktayı sola yaslayıp $4+1$ parçalanışını elde etmiyor muyuz?" diye düşünebiliriz. Fakat bu şekilde $f$'nin tanımının dışına çıkmış oluruz. Hem de $f(4+1)=5$ ve $f(5)=4+1$ olduğundan $3+2$'ye artık geri dönemeyiz. Ancak $f$'yi tanımladığımız gibi kullandığımızda bir kıvrılma elde ediyoruz.

Önceki bölümden hatırlayacağımız üzere 5 ve 7 sayıları, farklı kısımlara parçalanışları tek sayıda olan istisnalardan ($p_d(5)=3$ ve $p_d(7)=5$). Birazdan kanıtlayacağız ki bunun sebebi $5=3+2$ ve $7=4+3$ gibi $f$'nin uygulanmadığı parçalanışların varlığı.

Öte yandan 2+1 parçalanışında kısımlar ardışık olduğu halde bu sorunu yaşamıyoruz. $f(2+1)=3$ ve $f(3)=2+1$ oluyor.



2+1 $\longleftrightarrow$ 3

Demek ki kısımların hepsinin ardışık olması, $a$ ve $b$ olarak tanımladığımız noktaların kesişmesi problem yaratmak için yeterli değil. Bunun üstüne $a$ ve $b$'nin fazladan şartlar sağlaması gerekiyor.

Elimizde en küçükleri $b$ olan $a$ tane ardışık kısım olsun, yani

$$\mu : (b+a-1)+(b+a-2)+\cdots+(b+1)+b$$

parçalanışına bakalım. Kısımların hepsini bir eksilttiğimizi farzetsek, $b-1>a$ durumunda yeni bir en küçük $a$ kısmı ekleyebiliyoruz. Veya $a-1\geq b$ durumunda $b$'yi yerinden alıp ilk $b$ kısmı birer artırarak kısımları farklı yeni bir parçalanış elde edebiliyoruz. İki halde de $f(\mu)$ tanımlı. Ayrıca $f$ uygulanabildiğinde $f(f(\mu))=\mu$ olduğunu yukarıda ispatlamıştık.

Sorunlu durumları en küçük kısmı $a$ veya $a+1$ olup ardışık $a$ kısımdan oluşan parçalanışlara indirgedik. Daha doğrusu parçalanışımız

$$\mu : 2a+(2a-2)+\cdots+(a+2)+(a+1)$$

veya

$$\mu : (2a-1)+(2a-2)+\cdots+(a+1)+a$$

formunda olmadığı sürece $f$'yi uygulayıp kısım sayısı çift olan farklı kısımlara parçalanışlarla kısım sayısı tek olan farklı kısımlara parçalanışları birebir eşleyebiliyoruz.

Şu halde problem yaratan sayılar hangileri? $a$ pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\begin{aligned}2a+&(2a-2)+\cdots+(a+2)+(a+1)\\ &=a^2+(a+(a-1)+\cdots+1)\\ &=a^2+\frac{a(a+1)}{2}\\ &=\frac{a(3a+1)}{2}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(2a-1)+&(2a-2)+\cdots+(a+1)+a\\ &=a^2+((a-1)+(a-2)+\cdots+1+0)\\ &=a^2+\frac{(a-1)a}{2}\\ &=\frac{a(3a-1)}{2},\end{aligned}$$

yani

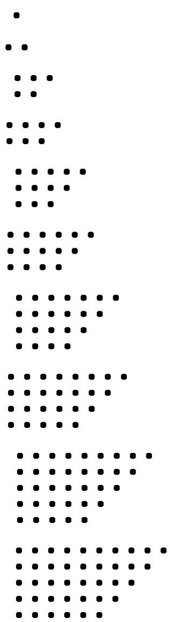
$$\frac{a(3a\pm 1)}{2}$$

olur. Bunlardan ilk birkaçı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

| $a$ | $\frac{a(3a-1)}{2}$ | $\frac{a(3a+1)}{2}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 5 | 7 |
| 3 | 12 | 15 |
| 4 | 22 | 26 |
| 5 | 35 | 40 |

Tam olarak $p_d(n)$'i tek yapan ilk birkaç sayı! Ve sorunun kaynağı olan parçalanışların ilk birkaçı da

| $n$ | $f$'nin uygulanmadığı yegane parçalanış |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 5 | 2+3 |
| 7 | 3+4 |
| 12 | 3+4+5 |
| 15 | 4+5+6 |
| 22 | 4+5+6+7 |
| 26 | 5+6+7+8 |
| 35 | 5+6+7+8+9 |
| 40 | 6+7+8+9+10 |



şeklinde listelenir. Hülasa, tabloda verilen parçalanışlar haricinde kısımları faklı ve tek sayıda olan parçalanışlarla kısımları farklı ve çift sayıda olan parçalanışlar eşit sayıdadır. Yalnızca sol sütundaki sayılar için, $a$'nın çift veya tek olma durumuna göre, kısımları çift veya tek sayıda olan farklı kısımlara parçalanışlardan bir grupta fazladan bir parçalanış vardır.

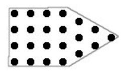
Pozitif tamsayı $n$'nin kısımları çift sayıda olan farklı kısımlara parçalanışlarının sayısına $p_{dc}(n)$, kısımları tek sayıda olan farklı kısımlara parçalanışlarının sayısına da $p_{dt}(n)$ diyelim. Şimdiye kadar bulduklarımızı aşağıdaki teoremde özetleyebiliriz.

**Teorem 1** (Euler'in Beşgen Sayı Teoremi)**.** *Herhangi bir pozitif tamsayı $n$ için*

$$p_{dc}(n)-p_{dt}(n)=\begin{cases}(-1)^a & n=\frac{a(3a\pm1)}{2} \text{ ise,}\\ 0 & \text{diğer tüm durumlarda.}\end{cases}$$

## 2. Neden Beşgen Sayılar?

1, 2, 5, 7, ... gibi sayılara beşgen sayı denmesinin sebebi, o sayıda noktayı belli bir biçimde dizerek bir beşgen oluşturabilmemizdir. Örneğin 22'yi ele alalım ve önceki bölümde *sorunlu* olarak teşhis ettiğimiz parçalanışının Ferrers Grafiğini düşünelim. En soldaki 4 sütunu biraz aşağı indirirsek kenar uzunluğu 4 nokta olan bir beşgen elde ederiz.



22 noktadan bir beşgen oluşturabiliriz.

Pozitif bir $a$ tamsayısı için $a^2$'ye bir kare sayı, $\frac{a(a+1)}{2}$'ye de üçgen sayı dememizin sebebi de budur. $a^2$ nokta ile kenarı $a$ nokta olan bir kare, $\frac{a(a+1)}{2}$ nokta ile de kenarı $a$ nokta olan bir üçgen oluşturabiliriz.

Euler'in beşgen sayı teoremini de isminin hakkını vererek yeniden ifade etmek istersek, "Herhangi bir pozitif tamsayı $n$'nin çift sayıda farklı kısma parçalanışlarının sayısı tek sayıda farklı kısma parçalanışlarının sayısına eşittir, ancak $n$ bir beşgen sayı ise aralarındaki fark birdir" deriz. Yani, $n$ beşgen bir sayı olmadığı sürece $p_d(n)$ çifttir.

Son olarak, başlarken neden *az sayıda istisna hariç* $p_d(n)$ çift sayıdır dediğimize gelelim. Euler'in beşgen sayı teoremini ve beşgen sayıların formülünü artık biliyoruz ($\frac{a(3a\pm1)}{2}$). İlk $M$ pozitif tamsayı $\{1,2,\ldots,M\}$ içinden rastgele seçilen bir sayının beşgen sayı olma olasılığı $M$ arttıkça azalır. Mesela ilk bin pozitif tamsayının 50'si beşgen sayı iken (ilk bin sayı arasında beşgen sayıya rastlama olasılığı $50/1000=\%5$), ilk yüzbin pozitif tamsayının 516'sı beşgen sayıdır (bu sayılar arasında beşgen sayıya rastlama olasılığı $516/100000=\%0.516$).

**Kaynakça:**
[1] *Integer Partitions*, George E. Andrews and Kimmo Eriksson, Cambridge University Press, 2004.
[2] `https://oeis.org/A000009` (farklı kısımlara parçalanış sayıları)
[3] `https://oeis.org/A001318/b001318.txt` (İlk 1000 beşgen sayı)