Tamsayı Parçalanışlarına Kombinatorik Bakış

Kağan Kurşungöz / kursungoz@sabanciuniv.edu

Bu yazıda tamsayı parçalanışlarına biraz daha yakından bakacağız (MD 2009 I-II, Parçalanış Sayısı). Birebir eşleme metoduyla kanıtlayabileceğimiz parçalanış özdeşlikleri görecek, ve parçalanış doğuran veya üreteç fonksiyonlara (MD 2005 Bahar, Doğuran Fonksiyonlar) daha çeşitli örnekler vereceğiz. Analitik kanıt, sonsuz çarpım gibi kavramlara yazıda geçtikçe kısa açıklamalar vermeye çalıştık. Fakat bunları bilmek asıl konumuz olan kombinatorik bakış için elzem değildir. Kombinatorik bakıştan kastımız sonlu sayıda işlem yaparak bazı sonlu kümeler (bu bağlamda parçalanış kümeleri) arasındaki ilişkileri anlamaktır.

Bir tamsayı parçalanışı, negatif olmayan bir tamsayının pozitif tamsayıların (parçaların veya kısımların) toplamı şeklinde yazılmasıdır. Parçaların sıralanışının önemi yoktur, o yüzden parçaları azalan sırada yazacağız. Örneğin, 4 sayısının 5 farklı parçalanışı vardır.

$$4, \quad 3+1, \quad 2+2, \quad 2+1+1, \quad 1+1+1+1$$

Dediğimiz gibi, $3+1$ ve $1+3$ aynı parçalanış olarak değerlendirilir. 4'ün 5 farklı parçalanışı olması $p(4) = 5$ ile ifade edilir. $p(n)$, n'nin parçalanış sayısıdır. 0'ın tek parçalanışı vardır, o da boş parçalanıştır.

1. Euler'in Parçalanış Özdeşliği

Parçalanış özdeşliklerinin çok büyük bir kısmı "negatif olmayan her n tamsayısı için, A koşulunu sağlayan parçalanışların sayısı, B koşulunu sağlayan parçalanışların sayısına eşittir" şeklindedir.

Tamsayı parçalanışları matematik yazınında ilk olarak Euler'in *Introductio in Analysin Infinitorum* adlı eserinde *de Partitio Numerorum* başlıklı 16. bölümde geçer. Euler burada bilinen ilk parçalanış özdeşliğini verir.

Teorem 1. *Negatif olmayan her n tamsayısı için, n'nin kısımları tek sayı olan parçalanışlarının sayısı n'nin kısımları birbirinden farklı olan parçalanışlarının sayısına eşittir.*

Mesela diyelim $n = 6$. 6'nın kısımları tek sayılar olan parçalanışları ilk sütunda, kısımları birbirinden farklı parçalanışları ikinci sütunda verilmiştir.

$5+1$	6
$3+3$	$5+1$
$3+1+1+1$	$4+2$
$1+1+1+1+1+1$	$3+2+1$

Burada Euler'in doğuran fonksiyonlar kullanarak yaptığı analitik kanıtının yerine önce J.W.L. Glaisher'e ait olan birebir eşlemeli kanıtı vereceğiz. Dikkat edilecek bir nokta, teoremin verilen n için birbirine eşit olan bu parçalanış sayılarının *kaç* olduğunu söylememesidir. Yani kanıt için iki grubu birbirine birebir eşlememiz yeter.

Herhangi bir n sayısının parçaları tek sayı olan parçalanışlarının kümesine A_n, parçaları birbirinden farklı parçalanışlarının kümesine de B_n diyelim. A_n kümesinin her elemanı için B_n'den bir eleman üreten, ve B_n kümesinin her elemanı için A_n'den bir eleman üreten iki yordam tanımlayacağız. Yordam aslında bir fonksiyondur, tanım kümesinden her elemanı değer kümesinden bir ve yanlız bir elemana eşler. Burada formülden ziyade bir kural ile tanımlandığı için, fonksiyon yerine yordam demeyi uygun gördük.

Parçaları tek sayı olan bir parçalanış verildiğinde (A_n kümesinin bir elemanı) tekrarlı kısımlar varsa, aynı iki kısmı parçalanıştan alıp yerine o parçaların toplamı olan tek bir parça koyalım. Tekrarlanan kısımlar oldukça bunu yapmaya devam edelim. Bir parçalanışta sonlu sayıda parça vardır, ve her adımda parça sayısını bir azaltıyoruz. Demek ki bu yordam sonlu adım sonrasında duracaktır. Durduğunda da elimizdeki parçalanışta farklı kısımlar olmak zorunda (B_n kümesinin elemanı), yoksa birleştirmeye devam ederdik. Aslında bu işlem verildiği anda kanıtın neredeyse tamamını yapmış oluyoruz, çünkü ana fikri verdik.

Şimdi, bir B_n elemanı verildiğinde (parçalar birbinden farklı) ne yapacağımızı düşünelim. Eğer bu farklı parçaların hepsi tek sayıysa yapmamız gereken bir şey yok. Eğer elimizde bir çift parça varsa bunu parçalanıştan çıkarıp yerine o parçanın yarısından iki tane koyalım. Parçalanışta hiç çift parça kalmayana kadar bu işleme devam edelim. Yordam çift sayıları sürekli ikiye bölüp tek sayılara dokunmadığından sonlu sayıda adımda durmak zorundadır. Durduğu zaman da A_n elemanı bir parçalanış üretir (bütün parçalar tek sayı).

Bu iki işlemin birbirinin tersi olduğunu kanıtlamadan önce $n = 6$ örneğimizde yordamlarımızın nasıl çalıştıklarını göstermeye çalışalım. Yine en soldaki parçalanışlar kısımların hepsi tek olanlar, en sağdakiler de kısımları birbirinden farklı olanlar. İki kümeye de ait olan parçalanışlar için bir şey yapmaya gerek yok. İki kümeye de ait olmayan ama arada görünüp kaybolan parçalanışlar parantez içinde yazıldı.

$$\begin{gathered}5+1\\ 3+3 \leftrightarrow 6\\ 3+1+1+1 \leftrightarrow 3+2+1\\ 1+1+1+1+1+1 \leftrightarrow (2+1+1+1+1)\\ \leftrightarrow (2+2+1+1) \leftrightarrow (2+2+2) \leftrightarrow 4+2\end{gathered}$$

Herhangi bir tek sayıyı ele alalım. Yukarıda tanımladığımız yordamlar, bu tek sayının birden fazla tekrarı olduğunda her çifti silip yerine iki katını yazıyor, eğer iki katı da tekrar ederse onlardan da ikisini silip tek sayımızın dört katını yazıyor vs. Yukarıdaki örnekte son satırda $1 + 1$ yerine 2, 2+2 yerine 4 yazmamız gibi. Eğer 4'lerden de iki tane olsaydı onları silip yerlerine 8 yazacaktık.

Demek ki, verilen her tek sayının bir parçalanışta ne kadar tekrar ettiğine göre fazlalıklar silinip, $2, 4, 8, \ldots, 2^k$ katları yazılıyor, ve bu katlar tekrar etmiyor. Dikkatli bakanlarımız gördü ki, bu tek sayı l defa tekrar ediyorsa, l'nin iki tabanındaki açılımını yazdık, 1 olan her basamak için ikinin gerekli kuvvetiyle tek sayımızı çarpıp parçalanışa ekledik.

Öte yandan, verilen herhangi bir çift sayıyı $2^k\cdot$(tek sayı) şeklinde yazabileceğimize göre, bu çift sayıyı, yarısını, dörtte birini,... ikiye bölerek gittiğimizde belirttiğimiz tek çarpana ulaşacağımız açıktır. Yukarıdaki örnekte $1+1+1+1+1+1 = 6\cdot 1 = (110)_2\cdot 1 = 2^2\cdot 1 + 2^1\cdot 1 = 4+2$. Negatif olmayan her tamsayının iki tabanındaki gösterimi biricik olduğundan, yukarıda tanımlanan yordamlar birbirinin tersidir, demek ki iki kümenin aynı sayıda elemanı vardır.

Burada atladığımız adımı lise öğrencilerine bir alıştırma olarak verelim: A_n ve B_n kümeleri arasında tanımladığımız yordamların birbirinin tersi olması, neden kümelerin eleman sayılarının aynı olmasını gerektirir?

Şimdi Teorem 1'e tekrar bakalım. Sol tarafta *ikiye bölünmeyen* kısımlar kullanılarak oluşturulan parçalanışlar, sağ tarafta ise *iki veya daha fazla kez tekrarlanmayan* kısımlar kullanılarak oluşturulan parçalanışlar var. İspatta ise önce iki yordam oluşturduk. Bir yönde, *ikiden fazla tekrar* istenmediğinde parçaları birleştiren bir yordam vardı. Diğer yönde ise *ikiye bölünen kısımlar* istenmediğinde bunları ikiye ayıran bir yordam vardı. Bu yordamların birbirlerinin tersi olduğunu göstermek için de negatif olmayan tamsayıların *iki tabanında* gösterimlerinin biricik olduğundan yararlandık.

Bir önceki paragrafta iki yerine daha büyük bir pozitif tamsayı da kullanabiliriz. O zaman ispat, gerekli değişiklikler yapıldıktan sonra aşağıdaki daha genel teoremi kanıtlar.

Teorem 2. *$k \geq 2$ ve $n \geq 0$ tamsayılar olsun. n'nin, kısımları k'ya bölünmeyen parçalanışlarının sayısı, kısımları k defa veya daha fazla tekrar etmeyen parçalanışlarının sayısına eşittir.*

Örneğin $n = 6$ ve $k = 3$ alırsak, 6'nın kısımları 3'e bölünmeyen parçalanışları (soldaki sütun), kısımları 3 veya daha fazla kez tekrar etmeyen parçalanışlarıyla (sağdaki sütun) aynı sayıdadır.

$5+1$	6
$4+2$	$5+1$
$4+1+1$	$4+2$
$2+2+2$	$4+1+1$
$2+2+1+1$	$3+3$
$2+1+1+1+1$	$3+2+1$
$1+1+1+1+1+1$	$2+2+1+1$

Son tabloda sol sütundaki parçalanışları sağ sütundaki parçalanışlarla birebir eşleyebilir misiniz? Bunu yapmanın $7! = 5040$ farklı yolu vardır, fakat biz her n için çalışacak sistematik bir yol istiyoruz.

Teorem 2, içinde Teorem 1 benzeri sonsuz tane önermeyi barındırır. Yani, ikinci teoremin $k = 2$ durumu birinci teorem, diğer k'lar için durumları da başka benzer teoremlerdir. Fakat ikinci teoremin ispatı fazladan hemen hemen hiç bir şey gerektirmez. Bu, kombinatorik ispatların ne kadar işe yarar olduğuna bir örnektir. Böyle kanıtlar elimizdeki önermenin en kolay ve en derin şekilde anlaşılmasına yardımcı olurlar. Aşağıda Euler'in parçalanış özdeşliğinin (Teorem 1) ve genel halinin (Teorem 2) analitik kanıtlarını da vereceğiz. Yine de, hangi tür ispatın daha anlaşılır olduğuna karar vermeyi okuyucuya bırakıyoruz.

2. Doğuran Fonksiyonlar

Sonsuz çarpımları sonsuz toplamlara benzetebiliriz. Nasıl ki sonsuz toplamların bir sayıya yakınsaması için terimlerin giderek sıfıra yaklaşması gerekiyorsa, sonsuz çarpımların da bir sayıya yakınsayabilmesi için çarpanların giderek bire yaklaşması gerekir. MD 2009 I-II sayısı "Parçalanış Sayısı" yazısında aşağıdaki sonsuz çarpımın, geometrik seriler yardımıyla açıldığında katsayıları parçalanış sayılarını veren bir seriye dönüştüğü gösterilmişti.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n.$$

Bu çarpım ve seriye formel olarak bakabiliriz. İlle de yakınsaklık diyenler için $|q| < 1$ mutlak yakınsaklık sağlar. Fakat Euler'in yakınsaklık gibi bir baş ağrısının olmadığını da belirtelim.

Şimdi, soldaki çarpımda bütün n'ler yerine sadece tek sayıları kullansaydık, soldaki serinin katsayılarının ne olacağını görelim.

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2n+1}}$$

Geometrik serileri kullanırsak,

$$\begin{aligned}
&= \prod_{n=0}^{\infty} \Big(1 + q^{2n+1} + q^{2(2n+1)} + q^{3(2n+1)} + \cdots\Big) \\
&= \big(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots\big) \\
&\quad \times \big(1 + q^3 + q^6 + q^9 + \cdots\big) \\
&\quad\quad \times \big(1 + q^5 + q^{10} + q^{15} + \cdots\big) \times \cdots
\end{aligned}$$

Parantezleri çarpıp $q^0 = 1,\ q,\ q^2,\ \ldots$ terimlerini bir araya toplarsak,

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c(n) q^n$$

serisinde $c(n)$'nin n'nin kısımları tek sayılar olan parçalanışlarının sayısı olduğunu görürüz. Bir önceki çarpımda $(1 + q + q^2 + \cdots)$ parantezinden aldığımız terimin üssü kaç tane 1 kullandığımızı, $(1 + q^3 + q^6 + \cdots)$ parantezinden gelen terimin üssü kaç tane 3 kullandığımızı belirler vs. Dikkat edelim ki çift sayıda parça hiç kullanmadık. İlgili çarpanları en başta dışarıda bırakmıştık.

Yukarıda 6'nın kısımları tek sayı olan parçalanışlarını listelemiştik. Yazdığımız seride q^6'nın katsayısı 4 olacaktır, çünkü bu koşullara uyan dört parçalanış vardır. Örneğin $3+1+1+1$ parçalanışı, $1/(1-q)$'nun seri açılımından q^{1+1+1}, $1/(1-q^3)$'ün seri açılımından q^3 ile çarpılarak elde edilecektir.

Demek ki, $\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+1})^{-1}$, kısımları tek sayılar olan parçalanış sayılarının doğuran fonksiyonudur. Elimizdeki örnekle uyuşması açısından tek sayıları aldık, ama doğal sayıların herhangi bir alt kümesini de kullanabilirdik. Geometrik serileri kullanarak ve parantez içindeki serilerin çarpımlarını benzer şekilde yorumlayarak aşağıdaki sonucu kanıtlayabiliriz.

Önerme 1. *Pozitif tamsayıların herhangi bir alt kümesi $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ verilsin. Negatif olmayan herhangi bir n tamsayısı için $s(n)$, n'nin kısımları S'ye ait olan parçalanışlarının sayısı olsun.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} s(n) q^n = \prod_{n\in S} \frac{1}{1-q^n}$$

özdeşliği geçerlidir.

Yani, parçalar S kümesi elemanlarından olacak şekilde oluşturulan parçalanışların sayısının doğuran fonksiyonu basit bir sonsuz çarpımla verilir.

Euler'in özdeşliğindeki diğer taraf, tekrar etmeyen veya tekrar sayısı iki veya daha büyük olmayan parçalanışların sayısı idi. Bu parçalanışların doğuran fonksiyonu

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} d(n) q^n$$

ile verilir. Sebebi, yukarıdaki serilerin açıklamalarından daha basittir. Soldaki sonsuz çarpımla ürettiğimiz herhangi bir parçalanışta, herhangi bir parçayı ya hiç kullanmayız, ya bir defa kullanırız. Dolayısıyla her parantez sonsuz bir toplam yerine $(1+q^j)$ şeklinde olur. Mesela, $4+2$ parçalanışı $(1+q^2)$ parantezinden q^2, $(1+q^4)$ parantezinden q^4, ve diğer parantezlerden 1 seçilip çarpılarak oluşturulur. $4+1+1$ oluşturulmaz, çünkü $(1+q)$ parantezinde q^2 terimi yoktur.

Şu halde Euler'in parçalanış özdeşliği (Teorem 1) $c(n) = d(n)$ olarak ifade edilir. Euler'in özgün kanıtı, doğuran fonksiyonların birbirine özdeş olduğunu göstermek idi.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c(n) q^n &= \prod_{n\geq 1} \frac{1}{(1-q^{2n+1})} \\
&= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots} \\
&= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} \\
&= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} d(n) q^n
\end{aligned}$$

Son satıra geçerken $(a^2-b^2)/(a-b) = a+b$ özdeşliğini kullanarak yukarıdaki parantezleri sırasıyla aşağıdakilerle sadeleştirdik. Yukarıda belirttiğimiz gibi $|q| < 1$ durumunda seriler ve çarpımlar mutlak yakınsar, böylece sonsuz çarpımlarda çarpanların sırasını istediğimiz gibi değiştirebilir ve istediğimiz gibi sadeleştirebiliriz. Fakat tekrar hatırlatalım ki, Euler'in böyle dertleri yoktu. O sonsuz toplam veya çarpımlara formel olarak bakardı.

Bu bölümde yazdıklarımızda gerekli ufak tefek değişiklikler yapıldıktan sonra Teorem 2'nin de analitik ispatını verebiliriz. Buarada anlitik kanıttan kastımız, diziler veya serilerin yakınsaklığını kullanarak, iki fonksiyonun birbirine özdeş olduğunu göstermektir. Verilen $k \geq 2$ tamsayısı için $c_k(n)$, n'nin kısımları k'ya bölünmeyen parçalanışlarının sayısı, $d_k(n)$ de n'nin kısımları k defa veya daha çok kez tekrar etmeyen parçalanışlarının sayısı olsun. Euler'in parçalanış özdeşliğinin genel hali $c_k(n) = d_k(n)$ eşitliğinin negatif olmayan her n tamsayısı için geçerli olduğunu söyler. Doğuran fonksiyonları düşünürsek,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c_k(n)q^n &= \prod_{n\geq 0, k\nmid n} \frac{1}{(1-q^n)} \\
&= \prod_{n\geq 0} \frac{1}{[(1-q^{nk+1})(1-q^{nk+2})\cdots(1-q^{nk+k-1})]} \\
&= \frac{(1-q^k)(1-q^{2k})(1-q^{3k})\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} \\
&= \prod_{n\geq 1} (1+q^n+q^{2n}+\cdots+q^{(k-1)n}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} d_k(n)q^n
\end{aligned}$$

özdeşlikleri dizisi Teorem 2'yi analitik olarak kanıtlar.

Dediğimiz gibi, önceki bölümde verilen kombinatorik ispatların mı, bu bölümde verilen analitik ispatların mı daha anlaşılır veya aydınlatıcı olduğu kararını okuyucuya bırakıyoruz.

3. Schur'un Parçalanış Özdeşliği

Bu bölümde, Euler'in parçalanış özdeşliğini (Teorem 1) yazmasından ancak 150 yılı aşkın zaman sonra Schur tarafından bulunabilen benzer bir özdeşlikten bahsedeceğiz. Aslında tarihsel olarak Euler ve Schur'un parçalanış özdeşlikleri arasında kalan iki sonuçtan, Rogers-Ramanujan özdeşliklerinden de bahsetmemiz gerekir. Fakat onları kanıtlamak için gerekli altyapıyı bu yazıda oluşturmadığımızdan, ve kendi başlarına bir yazının konusu olacak kadar önemli sonuçlar olduğundan, onları başka bir yazıya bırakıyoruz.

Teorem 3. *Negatif olmayan herhangi bir tamsayı n verilsin. $A(n)$, n'in parçaları 6'ya bölündüğünde 1 veya 5 kalanını veren sayılardan oluşan parçalanış sayısı, $B(n)$, n'in parçaları 3'ün katı olmayan ve hepsi birbirinden farklı olan parçalanışlarının sayısı, $C(n)$ ise n'nin parçaları arasındaki fark en az üç olan ve üçe bölünen parçalar arasındaki fark en az altı olan parçalanışlarının sayısı olsun. O halde*

$$A(n) = B(n) = C(n)$$

eşitliği geçerlidir.

Örneğin, $n = 9$ aldığımızda aşağıdaki parçalanışları elde ederiz. İlk sütunda parçalar altıya böldüğünde 1 veya 5 kalanını veren parçalanışlar var ($A(9)$'un saydıkları). Orta sütunda parçalar birbirinden farklı ve hiçbiri üçe bölünmüyor ($B(9)$ ile sayılanlar). Son sütunda ise parçaların arasında en az üç, üçe bölünen parçaların arasında ise en az altı fark olan parçalanışları görüyoruz ($C(9)$'un saydıkları). Son sütunda 6+3 parçalanışı yok, çünkü 3 ve 6 üçün katları, ama aralarındaki fark 3.

$7+1+1$	$8+1$	9
$5+1+1+1+1$	$7+2$	$8+1$
$1+\cdots+1$	$5+4$	$7+2$

Bu yazıda sadece $A(n) = B(n)$ eşitliğinin ispatını vereceğiz. $B(n) = C(n)$ eşitliğini kanıtlamak için kombinatorik bir yol mevcuttur, fakat ispatı yukarıda verdiklerimizden daha girifttir. Analitik ispat ise iki değişkenli doğuran fonksiyonları kullanmayı gerektirir. Bu iki ispatı da bir başka yazıya bırakıyoruz.

$A(n) = B(n)$ eşitliğini ispatlamak içinse Euler'in özdeşliğinin Glaisher tarafından verilen kombinatorik ispatına, yani Teorem 1'in ilk bölümdeki ispatına bakmak yeterlidir. İki tarafta da üçe bölünen sayıları çıkarırsak, üçe bölünmeyen tek sayılara parçalanışlar, üçe bölünmeyen ve birbirinden farklı olan parçalanışlarla birebir eşlenebilir. Kanıt hala geçerlidir çünkü ikiyle çarpmak veya ikiye bölmek, sayıların üçe bölünme durumunu değiştirmez. Üçe bölünmeyen tek sayıların altıya böldüklerinde 1 veya 5 kalanını verdiklerine dikkat edelim. Okuyucuyu şimdi üstteki tabloda ilk ve ikinci sütundaki parçalanışları Glaisher'in yöntemiyle birebir eşlemeye davet ediyoruz.

Doğuran fonksiyonlarla ispat da önceki bölümde anlattığımız teknikler ve Önerme 1 ile gayet basittir.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} A(n)q^n &= \prod_{n\geq 0} \frac{1}{(1-q^{6n+1})(1+q^{6n+5})} \\
&= \frac{1}{(1-q)(1-q^5)(1-q^7)(1-q^{11})\cdots} \\
&= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{10})\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^4)(1-q^5)\cdots} \\
&= (1+q)(1+q^2)(1+q^4)(1+q^5)\cdots \\
&= \prod_{n\geq 0} (1+q^{3n+1})(1+q^{3n+2}) \\
&= \sum_{n\geq 0} B(n)q^n
\end{aligned}$$

Kaynakça:

Integer Partitions, George E. Andrews and Kimmo Eriksson, Cambridge University Press, 2004.